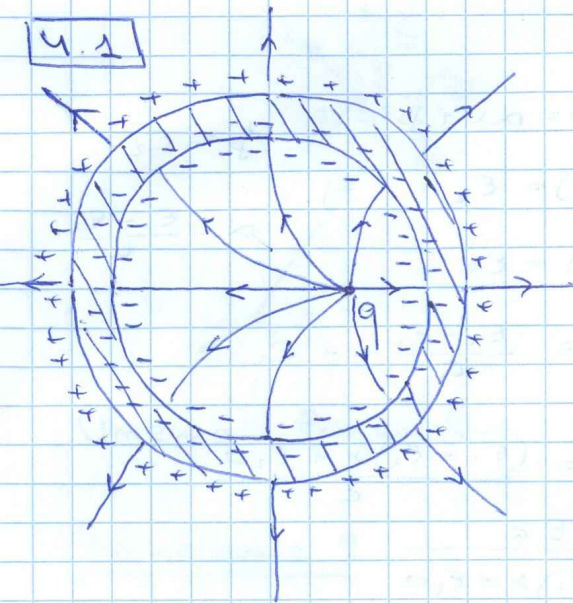


4.1



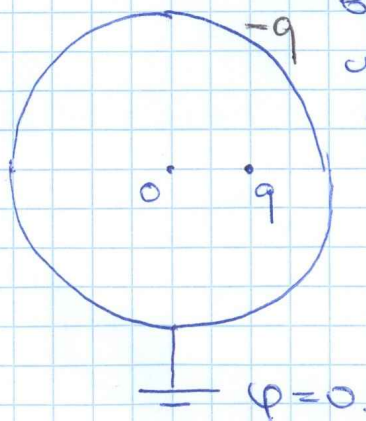
Заряд, находясь внутри сферы вызовет перераспределение своб. зарядов. Т.о. на внутр. оболочке будет индуц. заряд q_0 противоположн. знака, и на внешней $-q_0$.

В силу $\sim$ Гаусса $q_0 = -q$. (см. 3.5)

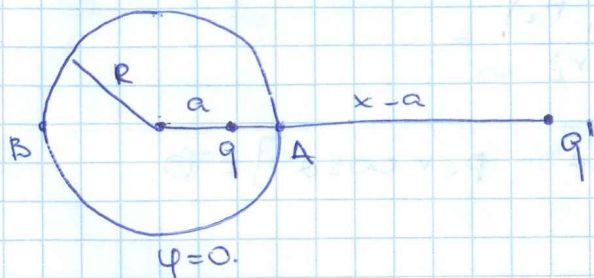
Заряд, находясь на внутр. оболочке, не создает поле заряда q (поле внутри металла $= 0$).

Заряд, находясь на внешн. оболочке не взаимодействует с зарядом q . Потенциал внешн. оболочки равен $\varphi_0 = \frac{kq}{R}$, как и внутренней. Т.о.

образом убрав внешн. оболочку потенциал внутренней станет 0. Следовательно можно переформулировать задачу:



Найти силу, с которой взаимодействие заряд q внутри заземленной сферы с этой сферой.



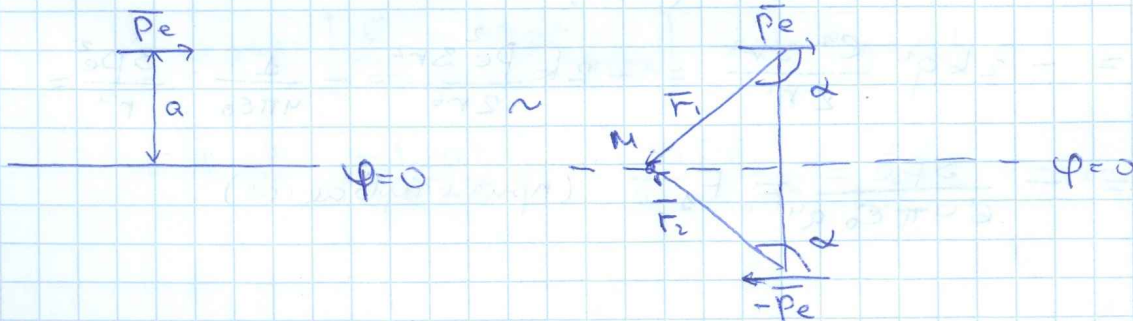
$$\begin{cases} \varphi_A = 0 = \frac{kq}{R-a} + \frac{kq'}{x-R} \\ \varphi_B = 0 = \frac{kq}{R+a} + \frac{kq'}{x+R} \end{cases}$$

$$\begin{cases} q'R - q'a + qx - qR = 0 & (1) \\ q'R + q'a + qx + qR = 0 & (2) \end{cases} \quad \begin{matrix} (1) + (2) \\ (2) - (1) \end{matrix}$$

$$\begin{cases} q'R + qx = 0 & \Rightarrow x = \frac{R^2}{a} \\ q'a + qR = 0 & \Rightarrow q' = -q \frac{R}{a} \end{cases}$$

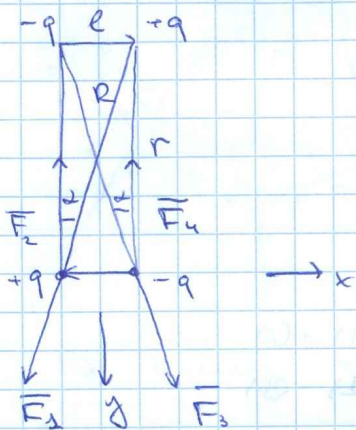
$$F = kq \cdot \frac{q'}{(x-a)^2} = kq^2 \frac{Ra}{(R^2 - a^2)^2}$$

4.3 a)



$$\varphi(M) = \frac{\overline{Pe} \overline{r_1}}{4\pi\epsilon_0 r_1^3} + \frac{(-\overline{Pe}, \overline{r_2})}{4\pi\epsilon_0 r_2^3} =$$

$$= \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r^3} [Pe r \cos\alpha - Pe r \cos\alpha] = 0.$$



$$x: -F_1 \sin\alpha + F_3 \sin\alpha = 0$$

$$y: F_1 \cos\alpha - F_2 + F_3 \cos\alpha - F_4 \textcircled{=}$$

$$F_1 = \frac{kq^2}{R^2} = F_3$$

$$F_2 = \frac{kq^2}{r^2} = F_4$$

$$\textcircled{=} \frac{2kq^2}{R^2} \cos\alpha - \frac{2kq^2}{r^2} \textcircled{=}$$

$$\cos\alpha = \frac{r}{R}$$

$$l^2 = R^2 - r^2$$

$$\textcircled{=} 2kq^2 \left[\frac{r}{R^3} - \frac{1}{r^2} \right] = 2kq^2 \frac{(r-R)(R^2+Rr+r^2)}{R^3 r^2} =$$

$$= -2kq^2 \frac{R^2(R^2+Rr+r^2)}{R^3 r^2 (R+r)} = -\frac{1}{R} \approx -\frac{1}{r} =$$

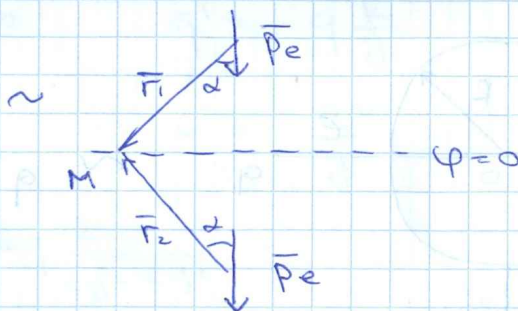
$$= -2kq^2 \frac{R^2 3r^2}{2r^6} = -2k \frac{Pe^2 3r^2}{2r^6} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{3Pe^2}{r^4} =$$

$$= -\frac{3Pe^2}{64\pi\epsilon_0 a^4} = F_2 \quad (\text{нпритягивает})$$

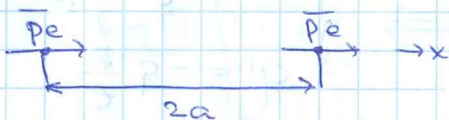
8)

$\vec{p}_e$

$\varphi=0$



$$\varphi(M) = \frac{\vec{p}_e \vec{r}_1}{4\pi\epsilon_0 r_1^3} + \frac{\vec{p}_e \vec{r}_2}{4\pi\epsilon_0 r_2^3} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r^3} \left[p_e r \cos \alpha + p_e r \cos(\pi - \alpha) \right] = 0.$$



$$x: F_2 = 2 \cdot \frac{kq^2}{4a^2} - \frac{kq^2}{(2a+e)^2} - \frac{kq^2}{(2a-e)^2} =$$

$$= kq^2 \left[\frac{1}{2a^2} - \frac{1}{(2a+e)^2} - \frac{1}{(2a-e)^2} \right] =$$

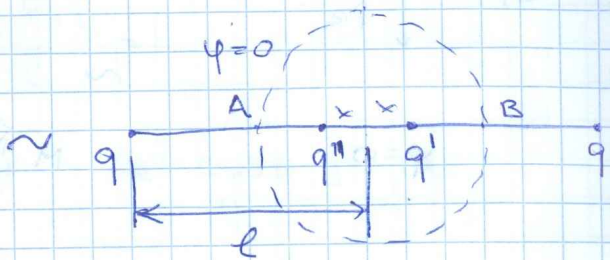
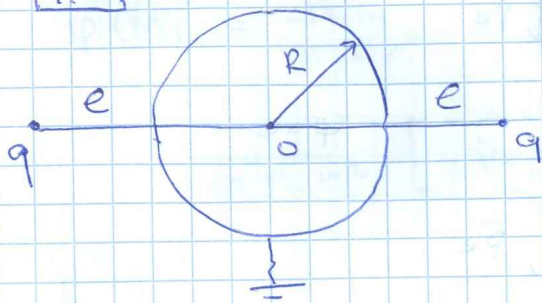
$$= kq^2 \left[\frac{1}{2a^2} - \frac{2(4a^2 + e^2)}{(4a^2 - e^2)^2} \right] =$$

$$= kq^2 \left[\frac{16a^4 - 8a^2e^2 + e^4 - 16a^4 - 4a^2e^2}{2a^2(4a^2 - e^2)^2} \right] =$$

$$= kq^2 e^2 \left[\frac{e^2 - 12a^2}{2a^2(4a^2 - e^2)^2} \right] \approx e \ll a =$$

$$= k p_e^2 \frac{-12a^2}{32a^4} = - \frac{3 p_e^2}{32\pi\epsilon_0 a^4} = 2F_1 \text{ (отталкив.)}$$

14.2



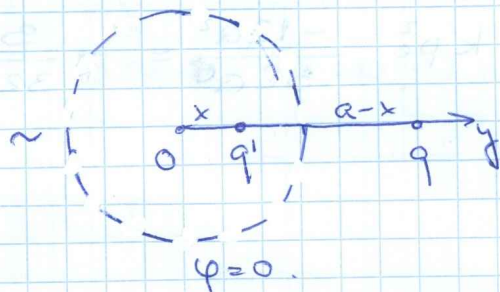
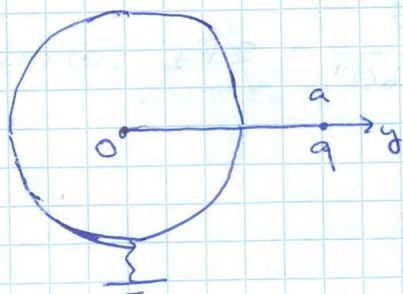
$$e = \frac{a}{2}$$

$$\begin{cases} \varphi_A = k \left[\frac{q}{e-R} + \frac{q'}{R-x} \right] = 0 \\ \varphi_B = k \left[\frac{q}{e+R} + \frac{q'}{R+x} \right] = 0 \end{cases} \xRightarrow{(u.1)} \begin{cases} x = \frac{R^2}{e} \\ q' = -q \frac{R}{e} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} F &= kq \left[\frac{q}{4e^2} - \frac{q'}{(e+x)^2} - \frac{q'}{(e-x)^2} \right] = \\ &= kq^2 \left[\frac{1}{4e^2} - \frac{Re \cdot 2(e^4 + R^4)}{(e^4 - R^4)^2} \right] = \\ &= \frac{kq^2}{4e^2} \left[1 - \frac{8Re^3(e^4 + R^4)}{(e^4 - R^4)^2} \right] = \\ &= \frac{kq^2}{a^2} \left[1 - 8 \left(\frac{1+\lambda^4}{(1-\lambda^4)^2} \right) \right], \quad \lambda = \frac{2R}{e} \end{aligned}$$

14.5

2)



4.3 4.2 изберем.

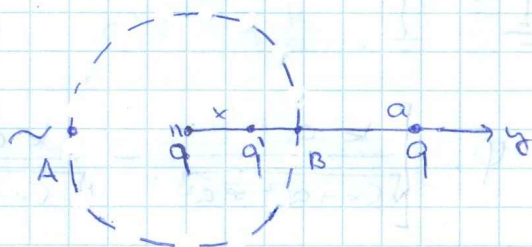
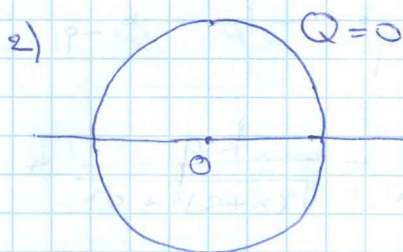
$$q' = -q \frac{R}{y}$$

$$x = \frac{R^2}{y}$$

$$E_y = \frac{kq'}{(y-x)^2} = -kq \frac{Ry}{(y^2-R^2)^2}$$

$$A = -\int_a^{+\infty} E_y dy = q \int_{+\infty}^a -\frac{kqRy}{(y^2-R^2)^2} dy = -\frac{kq^2R}{2} \int_{+\infty}^a \frac{dy^2}{(y^2-R^2)^2} =$$

$$= -\frac{kq^2R}{2} \int_{+\infty}^{a^2-R^2} \frac{dt}{t^2} = \frac{kq^2R}{2} \frac{1}{(a^2-R^2)} = \frac{q^2R}{8\pi\epsilon_0(a^2-R^2)}$$



$$\varphi_0 = \frac{kq}{y} + \oint \frac{k\sigma ds}{R} = k \left(\frac{q}{y} + \frac{Q}{R} \right) = \frac{kq}{y}$$

4.3 4.2 изберем, $q' = -q \frac{R}{y}$, $x = \frac{R^2}{y}$

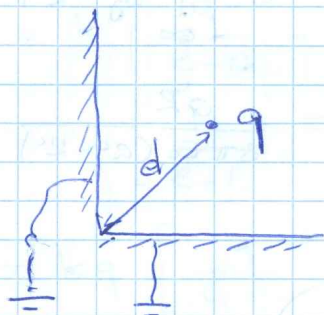
$$\varphi_0 = \frac{kq}{y} = \frac{kq''}{R} \Rightarrow q'' = q \frac{R}{y}$$

$$E_y = \frac{kq''}{y^2} + \frac{kq'}{(y-x)^2} = \frac{kqR}{y^3} - kq \frac{Ry}{(y^2-R^2)^2}$$

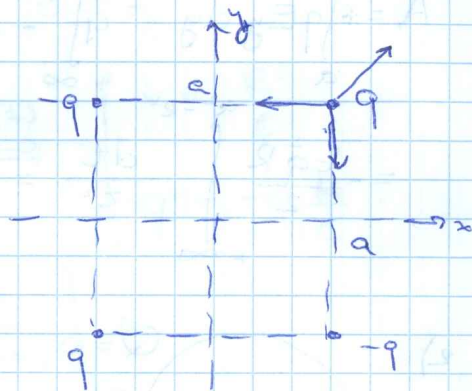
$$A = - \int_a^{+\infty} q E_y dy = -kq^2 R \left[- \int_a^{+\infty} \frac{y dy}{(y^2 - R^2)^2} + \int_a^{+\infty} \frac{dy}{y^3} \right] =$$

$$= kq^2 R \left[\frac{1}{2(a^2 - R^2)} - \frac{1}{2a^2} \right] = \frac{1}{8\pi\epsilon_0} \frac{q^2 R^3}{a^2(a^2 - R^2)}$$

4.6



~



$$x: \varphi_x = \frac{kq}{\sqrt{(x+a)^2 + a^2}} - \frac{kq}{\sqrt{(x-a)^2 + a^2}} - \frac{kq}{\sqrt{(x+a)^2 + a^2}} +$$

$$+ \frac{kq}{\sqrt{(x-a)^2 + a^2}} = 0 \quad a = \frac{\sqrt{2}}{2} d$$

В аналогичном $\varphi_y = 0$.

$$\vec{F} = kq^2 \left[\frac{1}{4d^2} \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2} \right) + \frac{1}{2d^2} (-1, 0) + \frac{1}{2d^2} (0, -1) \right]$$

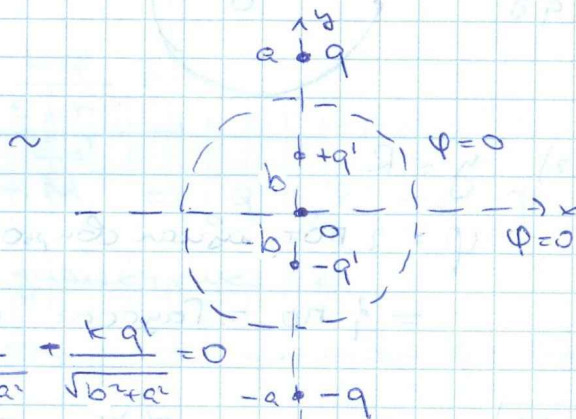
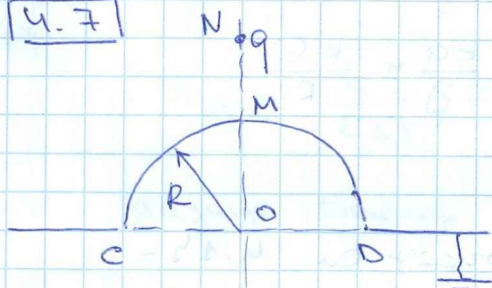
$$x: -\frac{kq^2}{2d^2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{kq^2}{4d^2} = \frac{kq^2}{4d^2} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - 2 \right) = F_x$$

$$y: F_y = \frac{kq^2}{4d^2} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - 2 \right)$$

$$F = \sqrt{2} F_x = - (2\sqrt{2} - 1) \frac{kq^2}{4d^2} = - \frac{q^2}{8\pi\epsilon_0 d^2} \left(\sqrt{2} - \frac{1}{2} \right)$$

$$\vec{F} = F \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}; -\frac{\sqrt{2}}{2} \right).$$

4.7



$$1) \frac{kq}{\sqrt{x^2 + a^2}} + \frac{kq'}{\sqrt{b^2 + a^2}} - \frac{kq}{\sqrt{x^2 + a^2}} + \frac{kq'}{\sqrt{b^2 + a^2}} = 0$$

$$2) \text{ из 4.2 известно: } q' = -q \frac{R}{a}; b = \frac{R^2}{a}$$

$$\begin{aligned} \varphi(x, y, z) = & \frac{kq}{\sqrt{x^2 + (y-a)^2 + z^2}} - \frac{kq}{\sqrt{x^2 + (y+a)^2 + z^2}} + \\ & + \frac{kq'}{\sqrt{x^2 + (y-b)^2 + z^2}} - \frac{kq'}{\sqrt{x^2 + (y+b)^2 + z^2}} \end{aligned}$$

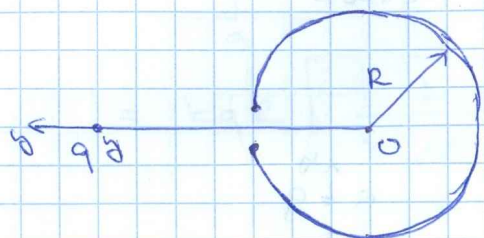
4.8

Начальное состояние соотв. случаю 4.5.1.

Конечное состояние соотв. случаю 4.5.2.

Тогда легко видеть, что с Земли перетянет заряд $q_0 = -q'' = -q \frac{R}{d}$.

4.9



1) $y \geq R$

$$\varphi = \frac{kq}{y} + \oint \frac{k\sigma ds}{R} =$$

$$= \frac{kq}{y} + \frac{kQ}{R}$$

2) $y \leq R$

$\varphi = ?$ поле вне сферы однородн. см. 4.14 =

= ? по т. Гаусса: $\oint E dS = \frac{q+Q}{\epsilon_0} \Rightarrow E = k \frac{q+Q}{R^2} y$

4.10

$$\varphi(x) = -\frac{\alpha x^2}{2} + C$$

$$\vec{E} = -\text{grad} \varphi = -\frac{\partial \varphi}{\partial x} \vec{i} = \alpha x \cdot \vec{i}$$

E параллельно оси Ox .

Воспользуемся ур-нем Пуассона:

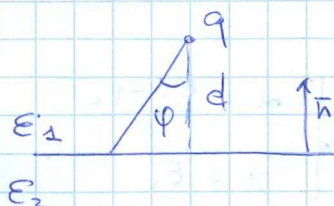
$$\Delta \varphi = \frac{\partial^2}{\partial x^2} \varphi(x) = -\alpha = -\frac{\rho}{\epsilon_0}$$

$\Downarrow$

$$\rho = +\alpha \epsilon_0$$

Полоса с объёмной плотностью заряда ρ

4.11



1) Посчитаем поле в диэлектр. 1.

Предположим, что оно создается зарядом q и q' (симметр. q).

$$\vec{E}_1 = \frac{kq}{\epsilon_1 r^3} \vec{r} + \underbrace{\frac{kq'}{\epsilon_1 r'^3} \vec{r}'}_{\vec{E}_1'}$$

$\vec{r}$ - радиус вектор в т.М от q , $\vec{r}'$ - от q' .

2) Посчитаем поле в диэлектрике 2.

Предположим, что оно создается зарядом q'' вместо q .

$$\vec{E}_2 = \frac{kq''}{\epsilon_2 r^3} \vec{r}$$

3) E_1 и E_2 должны удовл. граничным условиям.

$$E_{1\tau} = E_{2\tau}: \frac{q}{\epsilon_1} \cancel{\sin \varphi} + \frac{q'}{\epsilon_1} \cancel{\sin \varphi} = \frac{q''}{\epsilon_2} \cancel{\sin \varphi}$$

$$D_{n1} - D_{n2} = \sigma: \quad \text{т.к. против нормали. } (-\vec{n}).$$

$$[q \cos \varphi - q' \cos \varphi] - q'' \cos \varphi = 0.$$

И

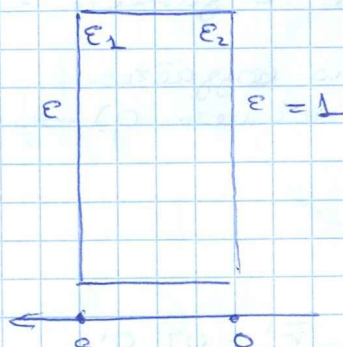
$$q' = \frac{\epsilon_1 - \epsilon_2}{\epsilon_1 + \epsilon_2} q; \quad q'' = \frac{2\epsilon_2}{\epsilon_1 + \epsilon_2} q$$

$$\vec{F} = \vec{E}_1' q = \cancel{\frac{kq}{\epsilon_1 r^3} \vec{r}} - \frac{\epsilon_2 - \epsilon_1}{\epsilon_1 + \epsilon_2} \frac{q}{r^3} \vec{r} + \frac{kq^2}{\epsilon_1} = \cancel{\text{...}}$$

$$= - \frac{kq^2}{\epsilon_1} \frac{\epsilon_2 - \epsilon_1}{\epsilon_1 + \epsilon_2} \cdot \frac{1}{4d^2} \vec{n} \text{ (направляется)}$$

4.13

(1)



$$\begin{cases} E(x) = \alpha x + \beta \\ E(0) = E_2 \\ E(a) = E_1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = \frac{E_1 - E_2}{a} \\ \beta = E_2 \end{cases}$$

$$E(x) = \frac{E_1 - E_2}{a} x + E_2 = \frac{(E_1 - E_2)x + E_2 a}{a}$$

$$E(x) = \frac{D}{E(x) \epsilon_0} = \frac{E}{E(x)} = \frac{E a}{(E_1 - E_2)x + E_2 a}$$

$$E(x) = - \text{grad} \varphi(x) = - \frac{\partial \varphi}{\partial x} =$$

$$\Delta \varphi = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} (-E(x)) = E a \frac{E_1 - E_2}{[(E_1 - E_2)x + E_2 a]^2} =$$

$$= \frac{E}{E(x)^2} \frac{E_1 - E_2}{a}$$

$$\Delta \varphi = - \frac{\rho}{\epsilon \epsilon_0} = - \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (\text{гип-ве Ломмаче})$$

$$\rho = - \frac{\alpha \epsilon_0 E}{(a x + E_2)^2}, \quad \text{где} \quad \alpha = \frac{E_1 - E_2}{a}$$

$$(2) \quad E_1 = 2$$

$$E_2 = 4$$

$$a = 1 \text{ cm} = 10^{-2} \text{ m}$$

$$\alpha = \frac{E_1 - E_2}{a} = -2 \cdot 10^2 \text{ m}^{-1}$$

$$E = 3 \cdot 10^3 \frac{\text{B}}{\text{m}}$$

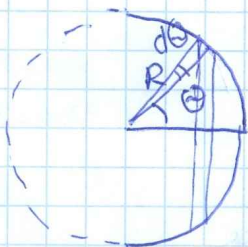
$$P\left(\frac{a}{2}\right) = \frac{2 \cdot 10^2 \text{ м}^{-1} \cdot 8,85 \cdot 10^{-12} \frac{\text{Кл}^2}{\text{Н} \cdot \text{м}^2} \cdot 3 \cdot 10^3 \frac{\text{В}}{\text{м}}}{(-2 \cdot 10^2 \text{ м}^{-1} \cdot \frac{1}{2} \cdot 10^{-2} \text{ м} + u)^2} =$$

$$= 5,9 \cdot 10^{-7} \frac{\text{Кл}^2}{\text{Н} \cdot \text{м}^3} \cdot \frac{\text{Н}}{\text{Кл}} = 0,59 \frac{\text{мКл}}{\text{м}^3}$$

4.14. Из задачи 3.21 известно, что поле создаваемое на поверхности сферы создает однородное поле внутри сферы.

$$\sigma = \sigma_{\text{max}} \cos \theta = P \cos \theta \quad (3.20)$$

Несколько фактов, что $\sigma_{\text{max}} = P = (\epsilon - 1) \epsilon_0 E$



$$S_{\text{кольца}} = 2\pi R \sin \theta R d\theta$$

$$dS = R^2 \sin \theta d\theta d\varphi$$

$$dq = \sigma(\theta) dS$$

$$Q = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sigma_{\text{max}} \cos \theta R^2 \sin \theta d\theta =$$

$$= 2\pi \cdot \sigma_{\text{max}} R^2 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\sin 2\theta}{2} d(2\theta) =$$

$$= \sigma_{\text{max}} \pi R^2 \left. \frac{1}{2} [-\cos 2\theta] \right|_{-\pi/2}^{\pi/2} = \sigma_{\text{max}} \pi R^2$$

4.15 (задача абсолютно аналогична 4.12)

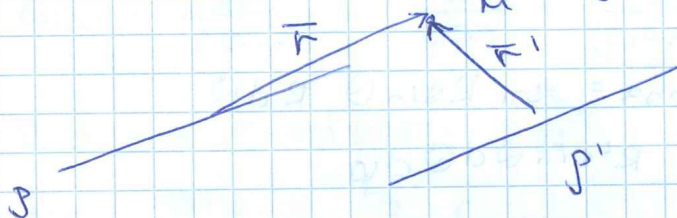
1) Найдем поле в 1-й зоне.

Предположим, что оно создается только p и только p' (сним p)

$$\vec{E}_1 = \frac{1}{2\pi\epsilon_0\epsilon_2} \left(\frac{p\vec{r}}{r^2} + \frac{p'\vec{r}'}{r'^2} \right) \quad (3.12)$$

$\vec{r}$ - вектор перпенд. к p и проходящий сонаправленно с $\vec{r}$ в з.м.

$\vec{r}'$ - аналогично для p' .

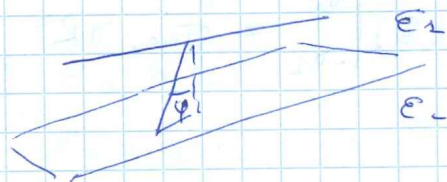


2) найдем поле во 2-й зоне

Предположим, что оно создается только p' внешнего p .

$$\vec{E}_2 = \frac{1}{2\pi\epsilon_0\epsilon_2} \frac{p'\vec{r}}{r^2}$$

3) граничные условия.



$$E_{21} = E_{22}$$

$$\frac{p}{\epsilon_1} \sin\varphi + \frac{p'}{\epsilon_1} \sin\varphi = \frac{p''}{\epsilon_2} \sin\varphi$$

$$D_{n1} = D_{n2} = \sigma : [p \cos\varphi + p' \cos\varphi] - p'' \cos\varphi = 0$$

$$p' = \frac{\epsilon_1 - \epsilon_2}{\epsilon_1 + \epsilon_2} p$$

$$p'' = \frac{2\epsilon_2}{\epsilon_1 + \epsilon_2} p$$

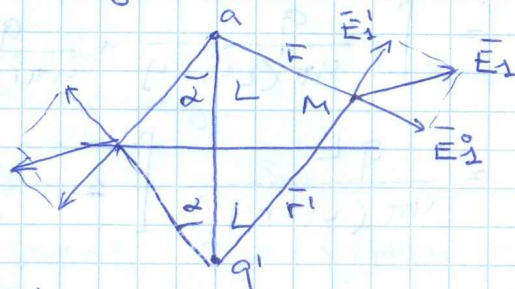
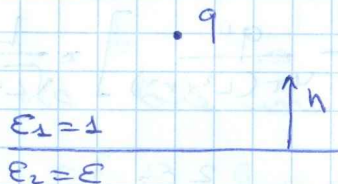
$$F = E_{\perp} dq = \oint \vec{E} \cos \alpha \, r d\varphi, \text{ по окружности } \perp \vec{E} = \text{норм}$$

$$= \frac{-dq}{2\pi\epsilon_0\epsilon_1} \frac{\epsilon_2 - \epsilon_1}{\epsilon_1 + \epsilon_2} \frac{r'}{r^2} = - \frac{p^2 d\epsilon}{4\pi\epsilon_0\epsilon_1 d} \frac{\epsilon_2 - \epsilon_1}{\epsilon_1 + \epsilon_2} \pi$$

$$\vec{F}_e = \frac{\vec{F}}{d\epsilon} = - \frac{p^2}{4\pi\epsilon_0\epsilon_1 d} \frac{\epsilon_2 - \epsilon_1}{\epsilon_2 + \epsilon_1} \pi \quad (\text{притяжение})$$

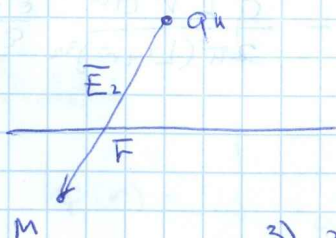
4.16

1) найдем поле $\vec{E}$ (1) области:



$$\vec{E} = \frac{kq}{\epsilon_1 r^3} \vec{r} + \frac{kq'}{\epsilon_1 r'^3} \vec{r}'$$

2) найдем поле $\vec{E}$ (2) области



$$\vec{E}_2 = \frac{kq''}{\epsilon_2 r^3} \vec{r}$$

3) граничные условия.

$$E_{\perp 1} = E_{\perp 2}: \quad \frac{q}{\epsilon_1} \sin \alpha + \frac{q'}{\epsilon_1} \sin \alpha = \frac{q''}{\epsilon_2} \sin \alpha$$

$$D_{n1} = D_{n2}: \quad q \cos \alpha - q' \cos \alpha = q'' \cos \alpha$$

$$q' = \frac{\epsilon_1 - \epsilon_2}{\epsilon_1 + \epsilon_2} q \quad ; \quad q'' = \frac{2\epsilon_2}{\epsilon_1 + \epsilon_2} q$$

Мы получили точную эквив. картину.
 Теперь ~~можно~~ между диэлектриком (ϵ_2) и
 вакуумом (ϵ_1) заменить неметаллическую
 фольгу.

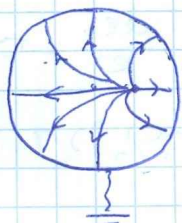
$$\begin{aligned} \sigma(r) &= D_{n1} - D_{n2} = [\epsilon_1 \epsilon_0 E_1 - \epsilon_2 \epsilon_0 E_2] \cos \alpha = \\ &= \left[\frac{q}{4\pi(L^2 + r^2)} + \frac{q'}{4\pi(L^2 + r^2)} - \frac{q''}{4\pi(L^2 + r^2)} \right] \approx \frac{L}{\sqrt{L^2 + r^2}} \\ &= \frac{qL}{4\pi(L^2 + r^2)^{3/2}} \left[1 + \frac{\epsilon_1 - \epsilon_2}{\epsilon_1 + \epsilon_2} - \frac{2\epsilon_2}{\epsilon_1 + \epsilon_2} \right] = \\ &= - \frac{qL}{2\pi(L^2 + r^2)^{3/2}} \frac{\epsilon_2 - \epsilon_1}{\epsilon_2 + \epsilon_1} = - \frac{qL}{2\pi(L^2 + r^2)^{3/2}} \frac{\epsilon - 1}{\epsilon + 1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Q &= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\infty} \sigma(r) dr \cdot r = 2\pi \int_0^{\infty} - \frac{qLrdr}{2\pi(L^2 + r^2)^{3/2}} \frac{\epsilon - 1}{\epsilon + 1} = \\ &= - qL \cdot \frac{\epsilon - 1}{\epsilon + 1} \int_0^{\infty} \frac{rdr}{(L^2 + r^2)^{3/2}} = \\ &= q \frac{\epsilon - 1}{\epsilon + 1} L \left[\frac{1}{\sqrt{L^2 + x^2}} \right] \Big|_0^{+\infty} = - q \frac{\epsilon + 1}{\epsilon + 1} \end{aligned}$$

$$\vec{F} = \vec{E}_1 q = - \frac{E_2 - E_1}{E_2 + E_1} \cdot \frac{\pi}{r^{1/2}} \cdot \frac{kq^2}{E_1} =$$

$$= - \frac{E - 1}{E + 1} \cdot \frac{kq}{L^2} \pi \quad (\text{притягивается}).$$

4.17 1) Из задачи 3.5 известно, что заряд на внутр. оболочке сферы не взаимодействует с зарядом на внешней оболочке.



Сфера заземлена $\Rightarrow \varphi = 0$.

В случае незаземленной сферы: $\varphi = \frac{kq}{R}$

Т.о. с Земли перетечет заряд $-q$ на внешнюю оболочку.

$\Downarrow$

поле вне сферы не будет.

2) На другой заряд вне сферы силы будут действовать, т.к. на внеш. оболочке появится заряд (с Земли) такой, чтобы поле внутри сферы осталось прежним. Этот поверхностный заряд и будет взаимодействовать.

4.18

$$\varphi(r) = \begin{cases} a/r & , r \geq R \\ -\frac{ar^2}{2R^3} + \frac{3a}{2R} & , r < R \end{cases}$$

~~$\varphi(r) = \varphi(0) + \varphi(r)$~~

$\varphi(0) = \frac{3a}{R}$ (сфера?)

$q = 12\pi\epsilon_0 R$

~~$\varphi_1 = \begin{cases} a/r - \frac{3a}{R} & , r \geq R \\ -\frac{ar^2}{2R^3} & , r < R \end{cases}$~~

$$E = -\text{grad} \varphi = -\frac{\partial \varphi}{\partial r} = \begin{cases} \frac{a}{r^2}, & r \geq R \\ \frac{ar}{R^3}, & r < R \end{cases}$$

$$D = \epsilon_0 E = \begin{cases} \frac{a\epsilon_0}{r^2}, & r \geq R \\ \frac{a\epsilon_0 r}{R^3}, & r < R \end{cases}$$

$$\sigma = \lim_{r \rightarrow R+0} D(r) - \lim_{r \rightarrow R-0} D(r) = \frac{a\epsilon_0}{R^3} - \frac{a\epsilon_0}{R^3} = 0$$

(сферы нет?)

$$-\frac{\rho}{\epsilon_0} = \Delta \varphi = \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{d\varphi}{dr} \right) =$$

$$= \frac{1}{r^2} \cdot \begin{cases} 0, & r \geq R \\ -\frac{3ar^2}{R^3}, & r < R \end{cases}$$

$$\rho = \begin{cases} 0, & r \geq R \\ \frac{3a\epsilon_0}{R^3}, & r < R \end{cases}$$

- равномерно
заряженный шар
($r < R$).

4.131

$$\varphi(r) = \begin{cases} 0, & r \geq R \\ a \left(\frac{1}{r} + \frac{r^2}{2R^3} - \frac{3}{2R} \right), & r < R \end{cases}$$

$$\varphi(r) \sim \frac{a}{r} \quad (r \rightarrow 0) \quad - \text{заряд } q = 4\pi\epsilon_0 a$$

$$\varphi(r) = \frac{a}{r} + \underbrace{\begin{cases} -\frac{a}{r} & , r \geq R \\ a \left(\frac{r^2}{2R^3} - \frac{3}{2R} \right) & , r < R \end{cases}}_{= \varphi_2(r)}$$

$$E = -\text{grad } \varphi_1 = -\frac{\partial \varphi_1}{\partial r} = \begin{cases} -\frac{a}{r^2} & , r \geq R \\ -\frac{a/r}{R^3} & , r < R \end{cases}$$

$$D(r) = \epsilon_0 E(r) = \begin{cases} -\frac{a\epsilon_0}{r^2} & , r \geq R \\ -\frac{a\epsilon_0 r}{R^3} & , r < R \end{cases}$$

$$\sigma = \lim_{r \rightarrow R+0} D(r) - \lim_{r \rightarrow R-0} D(r) = -\frac{a\epsilon_0}{R^2} + \frac{a\epsilon_0}{R^2} = 0$$

$$-\frac{\rho}{\epsilon_0} = \Delta \varphi_2 = \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{d\varphi_1}{dr} \right) = \frac{1}{r^2} \cdot \begin{cases} 0 & , r \geq R \\ \frac{3ar^2}{R^3} & , r < R \end{cases}$$

$$\rho = \begin{cases} 0 & , r \geq R \\ -\frac{3\epsilon_0 a}{R^3} & , r < R \end{cases} \quad (\text{wap})$$

4.20

$$\varphi(r) = \begin{cases} 0 & , r \geq R \\ a(R^3 - r^3) & , r < R \end{cases}$$

$$\lim_{r \rightarrow 0+0} \varphi(r) = \varphi(0) = aR^3$$

$$E = -\text{grad}\varphi = -\frac{\partial\varphi}{\partial r} = \begin{cases} 0, & r \geq R \\ 3ar^2, & r < R \end{cases}$$

$$D(r) = \epsilon_0 E(r) = \begin{cases} 0, & r \geq R \\ 3a\epsilon_0 r^2, & r < R \end{cases}$$

$$\sigma = \lim_{r \rightarrow R+0} D(r) - \lim_{r \rightarrow R-0} D(r) = -3a\epsilon_0 R^2 = -\sigma_{\text{ср}} \epsilon_0$$

$$-\frac{\rho}{\epsilon_0} = \Delta\varphi = \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{d\varphi}{dr} \right) = \frac{1}{r^2} \cdot \begin{cases} 0, & r \geq R \\ -12ar^3, & r < R \end{cases}$$

$$\rho = \begin{cases} 0, & r > R \\ +12a\epsilon_0 r, & r < R \end{cases}$$

4.21

$$\varphi(r) = \begin{cases} 0, & r \geq R \\ a \left(\frac{1}{r} - \frac{r^2}{R^3} \right), & r < R \end{cases}$$

$$\varphi(r) \sim \frac{a}{r}, \quad r \rightarrow 0+0 \quad - \text{запас } q = 4\pi\epsilon_0 a$$

$$\varphi(r) = \frac{a}{r} + \varphi_1(r) = \frac{a}{r} + \begin{cases} -\frac{a}{r}, & r \geq R \\ -\frac{ar^2}{R^3}, & r < R \end{cases}$$

$$E = -\text{grad}\varphi_1 = -\frac{\partial\varphi_1}{\partial r} = \begin{cases} -\frac{a}{r^2}, & r \geq R \\ \frac{2ar}{R^3}, & r < R \end{cases}$$

$$D(r) = \epsilon_0 E(r) = \begin{cases} -\frac{a\epsilon_0}{r^2}, & r \geq R \\ \frac{2a\epsilon_0 r}{R^3}, & r < R \end{cases}$$

$$\sigma = \lim_{r \rightarrow R+0} D(r) - \lim_{r \rightarrow R-0} D(r) = -\frac{a\epsilon_0}{R^2} + \frac{2a\epsilon_0}{R^2} = -\frac{a\epsilon_0}{R^2} \quad \text{— charge}$$

$$-\frac{\rho}{\epsilon_0} = \Delta\varphi = \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{d\varphi}{dr} \right) =$$

$$= \frac{1}{r^2} \begin{cases} 0, & r \geq R \\ -\frac{6a\epsilon_0 r^2}{R^3}, & r < R \end{cases}$$

$$\rho = \begin{cases} 0, & r \geq R \\ \frac{6a\epsilon_0}{R^3}, & r < R \end{cases} \quad \text{— map}$$

4.22

$$\varphi(r) = \frac{b}{r} e^{-ar}$$

$$\varphi(r) \sim \frac{b}{r} \quad (r \rightarrow 0+0) \quad \text{— заряд } q = 4\pi\epsilon_0 b$$

$$\varphi(r) = \frac{b}{r} + \varphi_1(r) = \frac{b}{r} + \frac{b}{r} (e^{-ar} - 1)$$

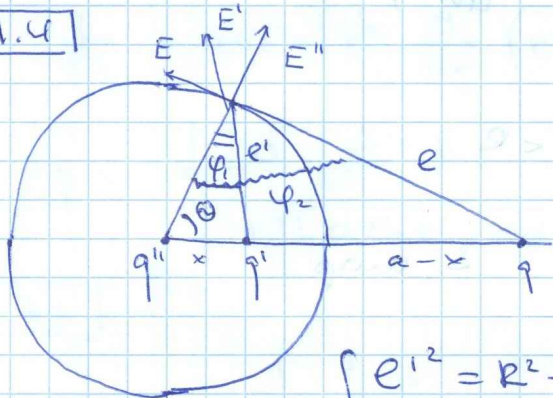
$$\frac{\partial \varphi}{\partial r} = \frac{-ab e^{-ar} r - b e^{-ar} + b}{r^2}$$

$$-\frac{\rho}{\epsilon_0} = \Delta\varphi = \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{d\varphi}{dr} \right) =$$

$$= \frac{1}{r^2} [a^2 b e^{-ar} r - ab e^{-ar} + ab e^{-ar}]$$

$\rho = -\frac{a^2 b e^{-ar}}{r} \epsilon_0$
 — map

4.4



из 4.5.2 из геометрии:

$$x = \frac{R^2}{a} \quad q' = -q \frac{k}{a}$$

$$q'' = q \frac{R}{a}$$

$$\begin{cases} e'^2 = R^2 + x^2 - 2Rx \cos \theta \\ e^2 = R^2 + a^2 - 2Ra \cos \theta \\ x^2 = R^2 + e'^2 - 2Re' \cos \varphi_1 \\ a^2 = R^2 + e^2 - 2Re \cos \varphi_2 \end{cases}$$

$\Downarrow$

$$\cos \varphi_1 = \frac{R^2 + (R^2 + x^2 - 2Rx \cos \theta) - x^2}{2Re'} =$$

$$= \frac{R - x \cos \theta}{e'}$$

$$\cos \varphi_2 = \frac{R - a \cos \theta}{e}$$

$$\begin{aligned}
E_n &= E'' + E' \cos \varphi_1 + E \cos \varphi_2 = \\
&= \frac{kq''}{R^2} + \frac{kq'}{e'^2} \cos \varphi_1 + \frac{kq}{e^2} \cos \varphi_2 = \\
&= kq \left[\frac{R}{aR^2} - \frac{R}{ae'^2} \frac{R - x \cos \Theta}{e'} + \frac{1}{e^2} \frac{R - a \cos \Theta}{e} \right] = \\
&= kq \left[\frac{1}{aR} - \frac{R}{a} \frac{aR - R^2 \cos \Theta}{a} (R^2 + x^2 - 2Rx \cos \Theta)^{-3/2} + \right. \\
&\quad \left. + \frac{R - a \cos \Theta}{(R^2 + a^2 - 2Ra \cos \Theta)^{3/2}} \right] = \\
&= kq \left[\frac{1}{aR} - \frac{R^2(a - R \cos \Theta)}{a^2} \left(R^2 + \frac{R^4}{e^2} - 2R \frac{R^2}{a} \cos \Theta \right)^{-3/2} + \right. \\
&\quad \left. + \frac{R - a \cos \Theta}{(R^2 + a^2 - 2Ra \cos \Theta)^{3/2}} \right] = \\
&= kq \left[\frac{1}{aR} - \frac{R^2(a - R \cos \Theta)}{a^2} \left(\frac{R^2(a^2 + R^2 - 2Ra \cos \Theta)}{a^2} \right)^{-3/2} + \right. \\
&\quad \left. + \frac{R - a \cos \Theta}{(R^2 + a^2 - 2Ra \cos \Theta)^{3/2}} \right] = \\
&= kq \left[\frac{1}{aR} - \frac{R^2(a - R \cos \Theta)}{a^2} \frac{a^3}{R^3} \frac{1}{(R^2 + a^2 - 2Ra \cos \Theta)^{3/2}} + \right. \\
&\quad \left. + \frac{R - a \cos \Theta}{(R^2 + a^2 - 2Ra \cos \Theta)^{3/2}} \right] =
\end{aligned}$$

$$= kq \left[\frac{1}{aR} - \frac{a^2 - R a \cos \theta - R^2 + R a \cos \theta}{R (R^2 + a^2 - 2 R a \cos \theta)^{3/2}} \right] =$$

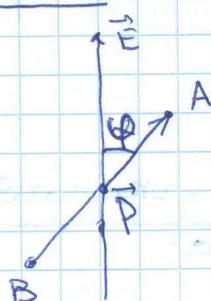
$$= \frac{kq}{Ra} \left[1 - \frac{a(a^2 - R^2)}{(R^2 + a^2 - 2 R a \cos \theta)^{3/2}} \right] =$$

$$= \frac{kq}{Ra} \left[1 - \frac{1 - \gamma^2}{(1 - 2\gamma \cos \theta + \gamma^2)^{3/2}} \right]; \quad \gamma = \frac{R}{a}$$

$$D_n = \epsilon_0 E_n = \sigma$$

$$\sigma = \frac{q}{4\pi Ra} \left[1 - \frac{1 - \gamma^2}{(1 - 2\gamma \cos \theta + \gamma^2)^{3/2}} \right]; \quad \gamma = \frac{R}{a}.$$

4.12



$$\Pi = q(\varphi_A - \varphi_B) = q \int_A^B \vec{E} d\vec{r} = -q \vec{E} \vec{r} = -q E l \cos \varphi$$

$$K = \frac{\partial \omega^2}{2} = \frac{\partial \dot{\varphi}^2}{2}$$

Известно, что для системы:

$$J = \frac{m l^2}{12} =$$

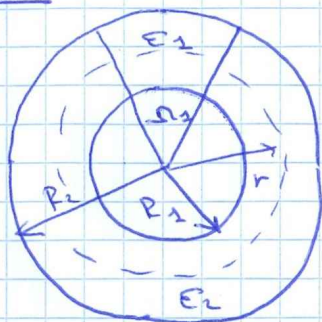
$$L = K - \Pi = \frac{\partial \dot{\varphi}^2}{2} + q E l \cos \varphi.$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = J \dot{\varphi} \quad \frac{\partial L}{\partial \varphi} = -q E l \sin \varphi$$

$$J \ddot{\varphi} + q E l \varphi = 0$$

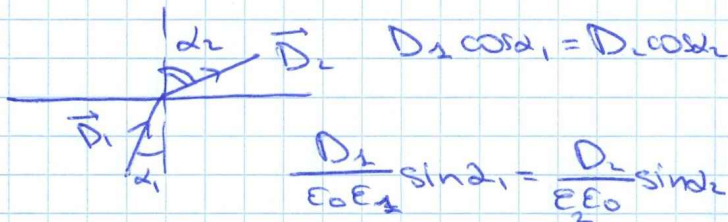
$$\ddot{\varphi} + \frac{q E l}{J} \varphi = 0 \Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{p E}{J}} = \frac{2}{l} \sqrt{\frac{p E}{m}}$$

4.23

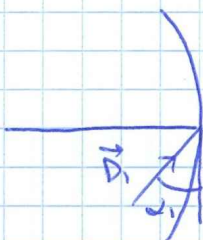


Рассмотрим поле на границе диэлектриков и металла:

(1)



(2):



$$D_1 \sin \alpha_1 = \sigma$$

$$D_2 \sin \alpha_2 = \sigma$$

$$\frac{D_1}{\epsilon_1 \epsilon_0} \cos \alpha_1 = 0$$

$$\frac{D_2}{\epsilon_2 \epsilon_0} \cos \alpha_2 = 0$$

$$\Rightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \text{поле радиально}$$

Воспользуемся т. Гаусса:

$$\oint D ds = Q \quad ; \quad r \in [R_1; R_2]$$

$$\epsilon_1 \epsilon_0 E \Omega_1 r^2 + \epsilon_2 \epsilon_0 E \Omega_2 r^2 = Q$$

$$E = \frac{Q}{\epsilon_0 r^2} \frac{1}{\Omega_1 \epsilon_1 + \Omega_2 \epsilon_2}$$